

2. Fractions rationnelles avec multiplicateurs rationnels

μ_f = mesure d'entropie maximale de f
→ mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que $\text{Supp}(\mu_f) = J_f$.

Théorème E (Baker & Rumely, Chambert-Loir, Favre & Rivera-Letelier). Soient K un corps de nombres, $f \in K(z)$ de degré $d \geq 2$ et $(S_n)_n$ une suite de parties $\neq \emptyset$, $2 \leq n$ disjointes et $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ -invariantes de $\text{Per}(f)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|S_n|} \sum_{z \in S_n} \delta_z$. Alors $\mu_n \xrightarrow{n} \mu_f$.

Pour $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ périodique pour f avec période p et multiplicateur λ , $\chi_f(z_0) = \frac{1}{p} \log |\lambda|$.

$\|f'\|$ = dérivée sphérique de f
→ fonction continue $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\|f'(z)\| = |f'(z)|_x \frac{1+|z|^2}{1+|f(z)|^2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \in \mathbb{C}$.

$$L_f = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log \|f'\| d\mu_f$$

Théorème Z (Zdunik). Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ non exceptionnelle. Alors f admet une infinité de points périodiques $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $\chi_f(z_0) > L_f$.

On a déjà montré:

Lemme. Soient $f \in \mathbb{C}(z)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus J_f$ un point périodique répulsif pour f . Alors il existe une suite $(w_n)_n$ de points périodiques pour f avec périodes $2 \leq n$ distinctes telle que $\chi_f(w_n) \xrightarrow{n} \chi_f(z_0)$.

Démonstration. Soient K un corps de nombres et $f \in K(z)$ de degré $d \geq 2$ telle que $\lambda_f \in K$.

• D'après Silverman, $\mathcal{M}_d = \frac{\text{Rat}_d}{\sim}$ est une variété définie sur $\mathbb{Q}$
et $Z_f = \{[g] \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \Lambda_g^{(n)} = \Lambda_f^{(n)}\}$ forme un fermé de Zariski défini sur K .

en fait, de $\mathcal{M}_d(\overline{\mathbb{Q}})$

D'après McMullen, Z_f est la réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et d'éventuellement une courbe de classes de conjugaison de LF.

Ainsi, si $g \in \mathbb{C}(z)$ est telle que $\Lambda_g^{(n)} = \Lambda_f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors g est un LF ou g est conjuguée à $h \in L(z)$ avec L corps de nombres $\supset K$.

→ Vrai pour $g = f$.

Si f est un LF, c'est gagné.

Quitte à conjuguer f et remplacer K par une extension finie, on peut supposer que $f \in K(z)$.

• Soit $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus J_f$ un point périodique répulsif pour f . Montrons que $\chi_f(z_0) \leq L_f$.

Il existe une suite $(w_n)_n$ de points périodiques pour f avec périodes $2 \leq n$ distinctes telle que $\chi_f(w_n) \xrightarrow{n} \chi_f(z_0)$.

$n \in \mathbb{N}$. p_n = période de w_n , ρ_n = multiplicateur de f en w_n

$n \in \mathbb{N}$. p_n = période de w_n , p_n = multiplicateur de f en w_n
 S_n = plus petit ensemble $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_K)$ -invariant qui contient le cycle contenant w_n
 $= \{ \sigma(f^j(w_n)) : j \in \{0, \dots, p_n-1\} \text{ et } \sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_K) \}$

Comme $f \in K(z)$, $S_n = \bigcup_{\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_K)} \{ f^j(\sigma(w_n)) : j \in \{0, \dots, p_n-1\} \}$ est une réunion de cycles de période p_n .

Pour tous $m \neq n$, $S_m \cap S_n = \emptyset$ puisque $p_m \neq p_n$.

Observation. Pour $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_K)$, $p_n^{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \text{multiplicateur de } f \text{ en } \sigma(w_n)$.
On a $p_n^{\sigma} = \sigma(p_n)$ car $f \in K(z)$, et donc $p_n^{\sigma} = p_n$ puisque $p_n \in K$.

Écrivons $S_n = \bigcup_{\ell=1}^r \{ f^j(\sigma_{\ell}(w_n)) : j \in \{0, \dots, p_n-1\} \}$ avec $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_K)$.

On a $\frac{1}{|S_n|} \sum_{z \in S_n} \log \|f'(z)\| = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\ell=1}^r \log |p_n^{\sigma_{\ell}}| = \frac{r}{|S_n|} \log |p_n| = \chi_f(w_n)$.

$\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|S_n|} \sum_{z \in S_n} \delta_z$. D'après le théorème E, $\mu_n \xrightarrow{n} \mu_f$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{R}$, $\chi_f(w_n) \leq \frac{1}{|S_n|} \sum_{z \in S_n} \max \{ \log \|f'(z)\|, m \} = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \underbrace{\max(\log \|f'\|, m)}_{\text{continue}} d\mu_n$

$n \rightarrow +\infty$: $\forall m \in \mathbb{R}$, $\chi_f(z_0) \leq \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \max(\log \|f'\|, m) d\mu_f$

$m \rightarrow -\infty$: $\chi_f(z_0) \leq d_f$

$\rightarrow$ Vrai pour tout point périodique $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sauf un nombre fini.

D'après le théorème Z, f est exceptionnelle. $\square$